

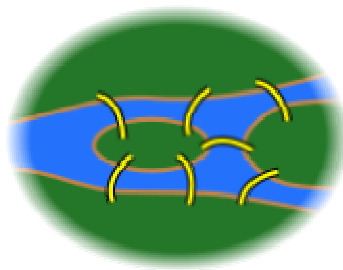
# Puskás Béla: Hálózatelméleti alapok

---

*"Egyébként kedves játék alakult ki a vitából. Annak bizonyításául, hogy a Földgolyó lakossága sokkal közelebb van egymáshoz, mindenféle tekintetben, mint ahogy valaha is volt, próbát ajánlott fel a társaság egyik tagja. Tessék egy akármilyen meghatározható egyént kijelölni a Föld másfél milliárd lakója közül, bármelyik pontján a Földnek - ő fogadást ajánl, hogy legföljebb öt más egyénen keresztül, kik közül az egyik neki személyes ismerőse, kapcsolatot tud létesíteni az illetővel, csupa közvetlen - ismeretség - alapon..."<sup>1</sup>*

Kedves játék vagy a valóságról volt szó? Sok hasonló játékkal találkozhatunk, amelyet később tudományos kutatások gyűjtőpontjai voltak.

1783-ban a königsbergi hidak problémája hasonlóan egy játékos feladvánnyal kezdődött. A poroszországi Königsbergben az ábrán látható folyón hét híd segítette a folyón való átjutást a szigetekre és a másik partra.



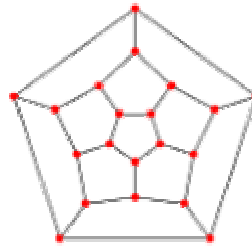
1. ábra königsbergi hidak elhelyezkedése

A königsbergiek azzal a kérdés felvetéssel fordultak Leonhard Euler (1707-1783) svájci matematikushoz, hogy lehet-e olyan útvonalat tervezni, amely mind a hét hídon átmegy, de csak egyszer érintve azt, majd visszaérkezik a kiinduló ponthoz. 1736-ban meg is kapták az egzakt választ Eulertől, hogy ez az útvonal lehetetlen.

1859-ben Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) kitalált és forgalomba hozott egy játékot, melynek a lényege az volt, hogy a lenti képen látható piros pontokon úgy kellett végighaladni mindegyiken, hogy azokat csak egyszer érinthetjük.

---

<sup>1</sup> (Karinthy Frigyes, 1929.) LÁNCSZEMEK című novella



2. ábra Hamilton által kitalált játéka

Az utóbbi játéknak akkor nem volt nagy sikere, de matematikailag mégis nagy jelentősége lett.

Az Königsbergiek és Hamilton által kitalált játék közös tulajdonsága a pontok és az azokat összekötő vonalak. A világban egymástól függetlenül, vagy éppen összekapcsolva több ezer hálózattal találkozhatunk. Léteznek társadalmi, távközlési, IT, közlekedési, áramszolgáltató, emberi testben lévő hálózatok és még sok egyéb más. Minden ilyen hálózat szerkezetét és tulajdonságát, viselkedését matematikailag gráfokkal tudunk leírni, ezáltal vizsgálni is. Természetesen, mint hogy egy új területről van szó folyamatosan változtak a vizsgálati módszerek. Kezdetben pusztán a pontokat és az őket összekötő éleket, vonalakat tanulmányozták, majd rájöttek, hogy a természetben nem minden pont és él ugyanolyan. König Dénes (1884-1944) magyar matematikus 1936-ban megírta az első igazán tudományos gráfelméleti tankönyvet.

## Néhány alapfogalom

A gráfokkal kapcsolatban a mélyebb matematikai ismereteket mellőzve tisztázni kell néhány alapfogalmat ahhoz, hogy a hálózatok működésébe beláthassunk. A gráf csomópontok és az őket összekötő élek halmaza.

**A gráf jelölése:**  $G=(V, E)$

ahol a  $V^2$  pontokat(csomópontokat) és  $E^3$  az éleket jelöli. **Irányítatlan gráfnak** is nevezik, mert nem vizsgálják, hogy a két pontot összekötő él milyen irányba mutat.

**csomópontok száma:**  $n = |V|$

**élek száma:**  $e = |E|$

---

<sup>2</sup> angol vertex= csúcs szóból

<sup>3</sup> az angol edge = él szóból

Abban az esetben, ha fontos az élek iránya, akkor **irányított gráfokat** használunk.

A jelölése:  $\vec{G} = (V, \vec{E})$

Ilyenkor az **élek jelölése**:  $e=(u, v)$ , ami azt jelenti, hogy u-ból kiindulva v-be jutunk az adott élen keresztül.

Az élek egyik speciális esete, amikor mindkét végpontja megegyezik, tehát ugyanabba a pontba ér vissza az él másik pont érintése nélkül. Ilyenkor **hurokélnek** nevezzük az összekötő szakaszt. A másik nevezetes él a **párhuzamosél**. Ezek végpontjai megegyeznek, vagyis egy pontból kiindulva ugyanazon másik pontba egyszerre több él is megy. Azon gráfokat, ahol többszörös (párhuzamos) élek vannak **pszeudográfoknak** is nevezzük. **Egyszerű gráfok** azok, amelyek nem tartalmaznak hurokél és többszörös élt.

Két csomópontot akkor nevezünk **szomszédosnak**, ha van egy őket összekötő él. Hasonlóan a pontokat összekötő éleket akkor nevezük szomszédosnak, ha van egy közös csomópontjuk. **Körnek** nevezzük, ha a kiinduló és az utolsó csúcs megegyezik.

Egy csomópontoz csatlakozó élek számát **fokszám**nak nevezzük. Jele  $\text{deg}(v)$ , ahol a v a csomópontot jelöli. Ez egy nem negatív egész szám. Lehet nulla is, ez akkor fordul elő, amikor a pont nem kapcsolódik éllel egy másik ponthoz. A másik érdekesség a hurokélnek a fokszáma, aminek az értéke kettő.

Ha egy egyszerű gráf bármely két pontja össze van kötve éllel, akkor **teljes gráfnak** nevezzük.

Az n csomópontú teljes gráf éleinek a száma:

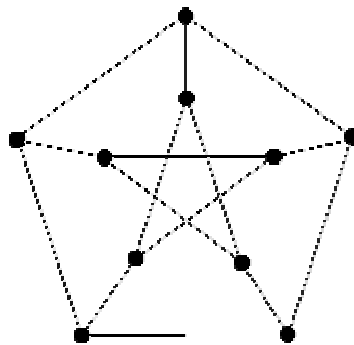
$$\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

Akkor **összefüggő** egy **gráf**, ha bármelyik két pont közt létezik folyamatos séta. A gráfelméletben a **séta** azt jelenti, hogy az összekapcsolt pontok és a csomópontok váltják egymást. **Útnak** nevezzük azt a sétát, amikor egyetlen ponton és élen sem haladunk át egynél többször. Jelölése:  $v_0 \rightsquigarrow v_k$ . **Vonalról** akkor beszélünk a gráfelméletben, amikor egy séta során az éleket csak egyszer érintjük, de a pontokon többször is áthaladhatunk. A **fáknak** nevezzük az összefüggő irányítás nélküli gráfokat, amelyek nem tartalmaznak köröket. Több, nem összefüggő fákból álló halmazt pedig **erdőnek**.

A sétának egyik speciális esete, a fentebb említett Königsbergi séta, ahol minden élen csak egyszer lehet végigmenni, vagy a Hamilton-út, amikor minden pontot csak egyszer érinthetünk. Talán első gondolatunk az lehet, hogy ez a két eset ugyanaz, de az utóbbi sokkal bonyolultabb kérdés.

1936-ban Euler a pontok fokszámával bebizonyította, hogy nem lehetséges a Königsbergi híd problémáját megoldani. Nem létezik olyan séta, amikor minden hídon kizárólag csak egyszer áthaladva visszaérkezhetünk ugyanahhoz a ponthoz. Eszerint a hídfőket leképezzük csomópontoknak, a hidakat pedig éleknek. Így három pontnak három, míg egy pontnak öt a fokszáma. Euler bizonyítása szerint csak akkor lehetséges olyan sétát tenni - amelyet a Königsbergi polgárok feladványukban elképzelték - ha minden csomópont fokszáma páros, vagy ha két pontjának fokszáma páratlan és a többi páros. Ez gráfokká leképezve egyszerűen belátható. A kiinduló és az utolsó csomópont lehet páratlan, de a többi pontba belépve el is kell azokat hagyni.

**Hamilton-útnak** nevezzük azt a sétát, amikor minden csomópontot kizárólag csak egyszer érintünk. Ennek egy speciális esete, a **Hamilton-kör**, amikor a kiindulópont és az utolsó pont is ugyanaz. Ebből következik, hogy vannak olyan gráfok, amelyek tartalmaznak Hamilton-utat, de Hamilton-kört nem. Ilyen nevezetes gráfok a **Petersen-gráf** és a  $n < 3$  teljes gráf.



3. ábra Petersen-gráf

Nem minden gráfban található Hamilton-út, valamint bonyolult gráfokban már nem ismeretes a szükséges és elégséges feltételt adó algoritmus. Ezt **NP-teljes** problémának is hívják.

**P-vel** a polinomiális tulajdonságot jelöljük, ami azt jelenti, hogy az adott számítási módszerrel, algoritmussal mindig ugyanannyi időt vesz igénybe a megoldása.

A **non-P-vel** jelölik, hogy nem garantált az adott időn belüli megoldása a problémának.

Nyilván akkor tudnánk egy problémára biztosan mondani, hogy nem létezik polinomiális megoldása, ha az összes lehetséges algoritmust lepróbálnánk. **NP** (nondeterminisztikus-P) jelölés ezt jelentené. Ahhoz, hogy mindent kipróbáljunk kevés az idő, kellene ötletek, ráhibázások. NP-én belül van még egy kisebb csoportosítás ez az NP-teljes. Ezek azok a problémák, amelyekről úgy vélik, hogy nincs polinomiális megoldásuk.

A Hamilton körnek egy gyakorlati területet érintő része az utazó ügynök problémája. Nevezetesen, adott  $n$  számú város, amelyet az ügynöknek be kell járnia úgy, hogy a kiindulási pontja és a megérkezési pontja ugyanaz a város legyen és minden várost csak egyszer érintsen. Ehhez fontos még, hogy a gráfok éleihez értékeket rendeljünk, mert nem mindegy, hogy mekkora az út A városból B-be. Így a Gráfot már súlyozott gráfnak nevezzük. Amennyiben visszavezetjük a Hamilton-kör problémájára, akkor megfogalmazhatjuk úgy is a kérdést, hogy melyik a legkisebb összsúllyal rendelkező Hamilton-kör. Az alapkérdés mindig az, van-e Hamilton kör?

A másik fontos terület a súlyozott gráfok gyakorlati alkalmazásánál, amikor azt keressük, hogy mi a minimális kiépítési költsége egy fizikai IT hálózatnak, csővezetékeknek, villanyvezetékeknek, stb..., ahol el kell érni minden pontot a hálózatban. Természetesen minden csomóponthoz legalább egy élnek kell mennie. Ezt a gráfelméletben **minimális feszítő fának** nevezik, ahol úgy kell minden csomópontot összekötni, hogy az élek összsúlya minimális és a gráf összefüggő legyen. Ebben a gráfban nem lesz kör, mert akkor biztosan lenne egy felesleges él. A **Bellman-Ford algoritmus** meghatározza egy pontból egy másik választott pontba vezető legrövidebb utat és annak hosszát.

Találkozunk még olyan esetekkel is, amikor a leghosszabb összsúlyú utat keressük, annak eldöntésére, hogy egy adott feladat mikor fejeződik be biztosan. A **feladatütemezési** eljárásoknál figyelembe kell venni az élek irányát is, így súlyozott irányított gráfokról beszélünk. Belátható, hogy miért van szükség irányított gráfokra, ha egy konkrét gyakorlati feladatot képzelünk el, ahol a munkafolyamatok egymásra épülnek. Ekkor az egyes pontok bemenetei várakoznak az előző kimenetére.

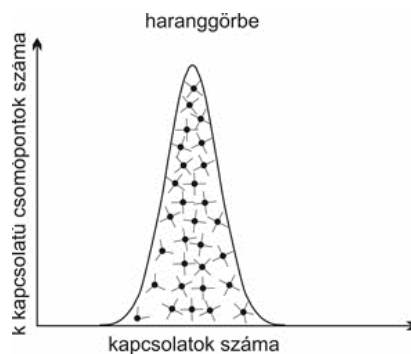
## Statikus állapotból a dinamikus gráfokig

Az eddig leírtakban adott volt egy hálózat, melynek voltak élei és csomópontjai, de ezek a vizsgálat során nem változtak. Szerencsére a világ nem ilyen, mert akkor unalmas lenne. Ezért felmerült, hogy nem csak úgy kell vizsgálni a hálózatot, hogy egy adott pillanatban milyen képet mutat, hanem ennek a dinamikus változását is figyelembe kell venni.

A hálózatelméleti kérdésekkel több magyar tudós is foglalkozott, foglalkozik. Ilyenek voltak Erdős Pál (1913-1996) és Rényi Alfréd (1921-1970) matematikusok, akik a hálózatok véletlenszerű eloszlása témakörben végeztek kimagasló kutatásokat. A jelen kor számomra legmeghatározóbb kutatója és tudósa, aki felkeltette bennem is a hálózatkutatás iránti érdeklődést Barabási Albert-László.

### Véletlen hálózat

Barabási és kutatócsapata azt vizsgálták, hogy mi történik ha a pontok ugyan továbbra is statikusak, de az éleket folyamatosan adjuk hozzá a pontok halmazához. Ezekben a hálózatokban azt feltételezzük, hogy a pontok adottak, azok száma és tulajdonsága nem változik a vizsgálat alatt. Továbbá azt is feltételezi, hogy a statikus pontok mind ugyanolyanok, nincs köztük kitüntetett szereppel bíró. Egy ilyen pontokból álló hálózat kialakulásának vizsgálatánál egyenrangú csomópontokat találunk. A köztük lévő élek véletlenszerűen adódnak hozzájuk. Eszerint, ha feltételezünk egy kellően hosszú időt, akkor a pontok fokszáma azonos lesz. A fokszámeloszlást tekintve egy Poisson-eloszlást mutat.

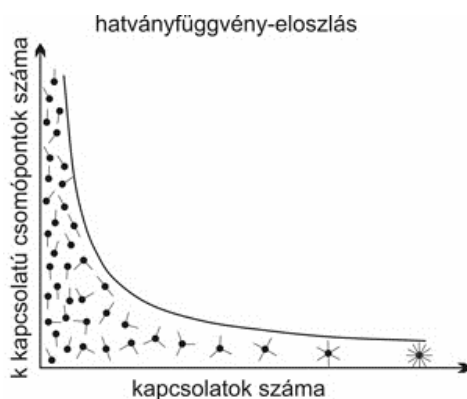


4. ábra Poisson-függvény

Az ábrán az látható, hogy a csomópontok többségének közel ugyanannyi éle van. Természetesen van ennél kevesebb és több éllel rendelkező csomópont is, azonban ezeknek a száma a vizsgálati idő meghosszabbításával csökkenthető. Minél több élt adunk hozzá annál kevesebb lesz annak a valószínűsége, hogy marad olyan pont, aminek nem lesz egyetlen él sem. Erdős és Rényi azt figyelték meg, hogy amennyiben a hálózatunkban lévő pontokra jutó élek száma meghaladja az egyet, akkor a hálózatból kimaradó pontok száma exponenciálisan csökken. Ez fordítva is igaz, amennyiben ez az érték lecsökken egy alá, a hálózatunk szétesik és sok kizárólag csak önmagukkal kommunikáló hálózatok maradnak.

### Skálafüggetlen hálózat

Azonban a valóságban nagyon kevés hálózatot írhatunk le véletlen modellekkel. Legtöbb esetben az élek nem véletlenszerűen csatlakoznak a meglévő pontokhoz.



5. ábra hatványfüggvény

A skálafüggetlen hálózatokban a fokeloszlás már hatványfüggvénnyel jellemezhető. Itt az figyelhető meg, hogy a pontok többségének a fokszáma kicsi és csak néhány rendelkezik több éllel. Ezek a jellemzők a gyakorlatban megfigyelhetők a repülőtér és a repülési útvonalak tekintetében. Van néhány forgalmas repülőtér és természetesen nagyon sok kis reptér, amely csatlakozik hozzájuk. A nagy forgalmú repülőterek sok éllel rendelkeznek, a kisebbek kevésse. A sok éllel rendelkező csomópontokat középpontnak nevezzük. Ilyen középponttal rendelkezik a világháló is.

### Dinamikusan növekvő hálózatok

Az eddigiekben a csomópontok statikusak voltak, a vizsgálat alatt számuk nem változott. Egy hálózat életében ezek is változnak néha eltűnnek csomópontok, máskor pedig megjelennek újak. Az Internet fejlődése remek lehetőséget adott Barabásinak és munkatársának, Albert Rékának, hogy a valódi hálózatokat vizsgálják. Ebben az esetben már nem csak az éleket adjuk hozzá folyamatosan, hanem a csomópontokat is. A hálózat fejlődését vizsgálva két fontos tényrt rögzítettek: a növekedést és a népszerűséget.

Első lépéskén vizsgáljuk a növekedést, tekintsünk minden pontot egyformának. Legyen két pont, majd folyamatosan adjunk hozzá egy-egy pontot a hálózathoz. Amikor egy új pont belép a rendszerbe "választ" magának két pontot, amihez éllel kapcsolódik. Már ekkor is beláthatjuk, hogy az utolsóként belépő pontoknak lesz a legkevesebb éle, az elsőeknek pedig a legnagyobb az esélye a legtöbb él megszerzésére.

Második lépésként vizsgáljuk úgy a hálózatot, hogy a belépő új pontok nem véletlenszerűen döntenek az élek kiosztásáról, hanem valamilyen népszerűség alapján. Így a középpontok, amik népszerűbbek, mert több éllel rendelkeznek nagyobb eséllyel kapnak újabb éleket. Egy hatványfüggvény szerint jellemezhető a hálózat. Ez a modellezés skálafüggetlen modellként vált ismerté.

Összegezve elmondható, hogy a növekvő hálózatra jellemző, hogy annak a valószínűsége, hogy a belépő csomópont kapcsolódjon egy már meglévővel, arányos a meglévő csomópont fokszámával. A skálafüggetlen rendszerek rendkívül hibátűrők a véletlen hibákkal szemben, de egy célzott támadás könnyen darabjaira szedheti a hálózatot, amikor a középpontokat támadják meg. Sok, kevés éllel rendelkező pont kieshet, anélkül, hogy a hálózat egészére hatással lenne. Igen fontos szerepe van a középpontoknak, amikor a vírusok, betegségek, stb.. terjedését vizsgáljuk. Egy középpont megfertőzése drasztikusan felgyorsítja a fertőzés terjedésének az idejét és számosságát. Az internetet tekintve a csomópontok 80%-át megsemmisítve még a 20% mindig egységes hálózatot alkot.

A harmadik, negyedik... lépés pedig a hálózati modellezésben, amikor a csomópontok és élek tulajdonságainak dinamikus változását is figyelembe vesszünk. Mert egy valódi, komplex hálózatban a pontok és élek eltűnnek, erősödnek, gyengülnek, öregednek, stb... Egyszóval a hálózatok "élnek".

A modellezéssel a valóságot képezzük le, de soha nem a valóságot mutatjuk be a teljes valóságban, főleg nem egy életciklusát az adott dolognak.

Néhány példa a gyakorlatból a hálózatokra:

A közlekedési úthálózatot vizsgálva általában nem beszélhetünk skálafüggetlen rendszerről. Általában a városokhoz közel azonos számú utak csatlakoznak. Természetesen vannak kivételek, ezek a harangfüggvény két oldalán helyezkednek el.

A skálafüggetlen természetes hálózatok például emberben az idegrendszer, érhálózat, de ilyenek a faágak, a levél erezete is. A társadalmi felépítettség is a skálafüggetlen modellekkel vizsgálható. Itt az emberi komplexitásból adódóan többdimenziós hálózatokról is beszélhetünk, amelyek csatlakoznak egymáshoz. Ezzel a modellel vizsgálható az élővilágra veszélyes vírusok terjedése, valamint a számítógépes vírusok terjedése is. Összegzésként megállapítható az a meglepő tény, hogy bár a vizsgálandó hálózatokat az élet különböző területeiről vesszük, azok viselkedése hálózatelméleti vonatkozásban nagyon hasonló és sok esetben összekapcsolódnak.

## **Gyenge és erős kapcsolatok**

Az eddigiekben a csomópontok közti éleket nem súlyoztuk. Természetesen nem csak a csomópontok különböznek, hanem az élek is. Ezt már láthattuk az utazó ügynökkel kapcsolatban is. Úgy mint a társadalmi hálózatokban a barátság, ismeretségnek is vannak szintjei, úgy az informatikában a sáv szélesség sem ugyanaz két pont közt. Ezeket a tényeket



fontos figyelembe venni és figyelembe is veszik. Például a routerek is vizsgálják, hogy a rájuk kapcsolt összekötetés milyen sávszélességgel bír. Ez lesz az egyik szempont, ami alapján mérlegel az eszköz, hogy a csomagokat merre továbbítsa.

A gyenge kapcsolatok éppen olyan fontosak a hálózatok tekintetében, mint az erősek. Az élővilágban a gyenge kapcsolatok biztosítják a rugalmasságot. Ez a rugalmasság biztosítja a hálózat stabilitását is. A társadalmi hálózatokban pedig a csoportok közti kapcsolatokban van nagy szerepe. Amennyiben szeretnék egy másik, tőlem távolálló közösségbe belépni a gyenge éleken keresztül megtehetem. A gyakorlatban megfigyelhető a gyenge kapcsolat "fontossága" például a pletyka terjedésében is. Amennyiben a mi kis zárt közösségünkben terjesztem, ahol mindenkinek a jó ismerőse vannak együtt, ott a pletykát jellemzően csak ők ismerik meg. Amikor egy gyenge kapcsolatot kihasználva, például a portásnak vagy a postásnak is elmondom, akivel naponta egyszer-kétszer találkozom, már kiszabadul a szellem a palackból.

Figyelembe véve a hálózatok sokszínűségeit könnyen tovább gondolható, hogy milyen területek azok ahol ennek igen komoly következményei is lehetnek. Természetesen ezek a kapcsolati mutatók változhatnak, az eddigi gyengéből erős lehet, és fordítva szintén bekövetkezhet.

A véletlen és skálafüggetlen hálózatok közti különbséget szemlélteti az is, amikor abba gondolunk bele, hogy lenne-e barátom, ha véletlen hálózatot alkotna a társadalom. Könnyen belátható, hogy ebben az esetben sem a távolság, sem a nyelv, sem egyéb más tényező nem számítana a barátság kialakulásában.

## Távolságok

Karinthy Frigyes LÁNCSZEMEK című művében a társadalmi hálózatokban fellelhető kapcsolatokon (élek) keresztül kötött össze két embert (csomópontot) öt más személyen keresztül.

Ebben az esetben a távolság alatt nem fizikai, km-ben mérhető távolságot értünk. Itt a távolság azt mutatja meg, hogy egy csomópontból a másikig hány csomóponton kell áthaladni. A kapcsolatok leírására a hálózatokban létezik egy csoporterősségi együtttható szám, amit úgy kapunk, hogy a csomópontok közötti tényleges kapcsolatok számát (éllel közvetlen összekötött pontok) elosztjuk annyival, amennyi akkor lenne, ha mindenki mindenkivel kapcsolatban állna. Amennyiben összekapcsolok két egymással kapcsolatban nem álló pontot, akkor a csoporterősségi együtttható értéke

lényegesen nem változik, de mégis a távolság az összes pont között jelentősen csökken.

1980-as években Tini Berners-Lee a CERN<sup>4</sup>-nél, a svájci Genfben így gondolkodott: *„Tegyük fel, hogy az összes, számítógépen tárolt információt összekapcsoljuk... A legjobb információkat a CERN és bolygónk minden számítógépéről elérhetném, és bárki más is. Egyetlen globális információtér lenne.”*<sup>5</sup> 1993. április 30-án a CERN bejelentette<sup>6</sup>, hogy a Világháló mindenki számára szabad és ingyenes. Ma a világon szinte már mindenki tudja, hogy ez az álom nemcsak hogy valóság lett, de sok mindenki élete részévé is vált..

A világháló segítségével Barabási csapata kutatásokat végzett a különböző weblapok között lévő távolságok modellezésére. Arra a következtetésre jutottak, hogy a távolság arányos a hálózatban lévő csomópontok számának logaritmusával. Pontosan:  $d = 0,35 + 2 \log N$ , ahol  $d$  az átlagos távolság a két lap között,  $N$  a webes oldalak száma.

Szintén az internet segítségét kéri egy új kezdeményezés a Karinthy féle gondolat igazolására. A „Kis világ kísérlet”<sup>7</sup> célja, hogy a világháló és konkrétan a Facebook felhasználók segítségével bizonyítsák, vagy esetleg cáfolják a hipotézist: a világon bárki hat lépés távolságra van egy másik véletlen kiválasztott embertől. Bár ők nem Karinthy-t, hanem Stanley Milgram (1933-1984) 1967-es kísérletére hivatkoznak. Milgram közel 300 levelet küldött véletlenszerűen kiválasztott embereknek Omaha-ba és Nebraska-ba azzal az megjegyzéssel, hogy a levél végső címzettje egy tőzsdeügynök Bostonban. A levél tartalmazta célszemély nevét, címét és foglalkozását. Arra kérte az embereket a levélben, ha ők nem ismerik a személyeket, akkor küldjék el a levelet egy olyan személynek, akiről úgy vélik, hogy ő ismerheti a célszemélyt vagy "közelebb állhat" hozzá. A levélből végül 60 ért célba. A kísérletben 5-7 személy részvétele elegendő volt a levél végső címre való juttatásához.

A BBC szerint<sup>8</sup> ez a távolság a Facebook-felhasználók esetében már csak 3,74. Persze ez egy speciális terület, amely virtuális térben értelmezhető hálózat, valamint maga a Facebook - mint közösségi oldal - éppen ilyen kapcsolat-"feltáró" oldalként jött létre. Sok esetben a virtuális hálózatban, térben élünk. Itt írjuk a levelinket, ismerkedünk, tanulunk, stb... Ennek és a többi technikai forradalomnak (közlekedés, telekommunikáció) köszönhetően felgyorsult a világ. Ma a távolságok nem minden esetben jelentik ugyanazt,

<sup>4</sup> Európai Nukleáris Kutatási Szervezet

<sup>5</sup> (Barabási, Albert-László, 2003) Behálózva

<sup>6</sup> (BBC, 1993) The declaration signed by Cern directors

<sup>7</sup> (Yahoo, 2012) Yahoo! Research Small World Experiment website

<sup>8</sup> (BBC, 2011) BBC NEWS TECHNOLOGY

mint régen. Amikor felveszem a kapcsolatot egy USA-ban lévő barátommal az Interneten, nekem egy kapcsolat a VOIP<sup>9</sup> telefonon keresztül, de valójában több routeren keresztül mennek át a csomagjaim. Ennél több kapcsoló van útközben. Így a távolság a relék feltalálása után robbanásszerűen csökkent.

A bemutatott, mindennapi életből vett "problémákra" sok esetben a gráfelmélet, hálózatelmélet ad egzakt választ. Természetesen a leírt Karinthy novella, a Königsbergi híd és a Hamilton által kitalált játék csak iskola példák voltak. A célom, hogy szemléltessem milyen fontos a matematikai modellezés, hogyan helyezhető el az a komplex hálózatokba. Nem volt célom a mély matematikai ismeretanyag leírása, valamint a bonyolultabb hálózatelméleti kérdések bemutatása.

---

<sup>9</sup> Voice-Over-Internet Protocol

### Irodalomjegyzék

*Wolfram MathWorld*. ( dátum nélk.). Letöltés dátuma: 2012. 09 13, forrás: mathworld.wolfram.com: <http://mathworld.wolfram.com/HamiltonianCycle.html>

Yahoo. (2012). *The Yahoo! Research Small World Experiment website*. Letöltés dátuma: 2012. 09 15, forrás: smallworld.sandbox.yahoo.com/: <http://smallworld.sandbox.yahoo.com/>

Barabási, A.-L. (2003). *Behálózva*. Budapest: Magyar könyvklub.

BBC. (2011. November 23). *BBC NEWS TECHNOLOGY*. Letöltés dátuma: 2012. 09 15, forrás: <http://www.bbc.co.uk>: <http://www.bbc.co.uk/news/technology-15844230>

Bronstejn, I. N., Szemengyajev, K. A., Musiol, G., & Mühlig, H. (2002). *Matematikai kézikönyv*. Budapest: Typotex Kft.

CERN. (1993. április 30). *The declaration signed by Cern directors which set the web free in 1993*. Letöltés dátuma: 2012. 09 15, forrás: news.bbc.co.uk: [http://news.bbc.co.uk/2/shared/spl/hi/pop\\_ups/08/technology\\_enl\\_1209563881/html/1.stm](http://news.bbc.co.uk/2/shared/spl/hi/pop_ups/08/technology_enl_1209563881/html/1.stm)

Karinthy, F. (1929.). *LÁNC SZEMEK*.

*Königsbergi hidak problémája*. (2012.. augusztus 3., 21:25). Letöltés dátuma: 2012. 09 03, forrás: [http://hu.wikipedia.org/wiki/K%C3%B6nigsbergi\\_hidak\\_prob%C3%A9m%C3%A1ja](http://hu.wikipedia.org/wiki/K%C3%B6nigsbergi_hidak_prob%C3%A9m%C3%A1ja)

Márton, S. (1993). *Matematikatörténeti ABC*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

*Óbudai Egyetem: Index of /jegyzetek/mat/NMM\_MATIII\_2006*. ( dátum nélk.). Letöltés dátuma: 2012. 09 13, forrás: <http://bgk.uni-obuda.hu>: [http://bgk.uni-obuda.hu/jegyzetek/mat/NMM\\_MATIII\\_2006/graf.pdf](http://bgk.uni-obuda.hu/jegyzetek/mat/NMM_MATIII_2006/graf.pdf)

*Southern Connecticut State University*. ( dátum nélk.). Letöltés dátuma: 2012. 09 13, forrás: [http://www.southernct.edu/~fields/comb\\_dic/P.html](http://www.southernct.edu/~fields/comb_dic/P.html)